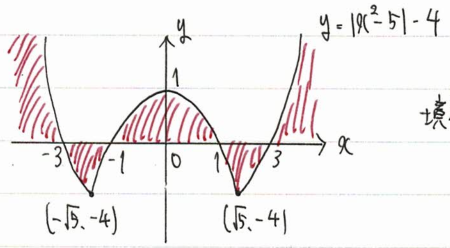
2007年　東大数学　文系第1問

A: $y(y-|x^2-5|+4) \leqq 0$

B: $y+x^2-2x-3 \leqq 0$　とおく。

(1) Aを図示する。

$y=0$ と $y=|x^2-5|-4$ の境界を考える。



境界含む

これに、Bを重ねて図示する。

$y=|x^2-5|-4$ と $y=-x^2+2x+3$ の交点をもとめると、

$$\begin{cases} -\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5} \text{ のとき、} & -x^2+1=-x^2+2x+3 \\ x \leqq -\sqrt{5}、\sqrt{5} \leqq x \text{ のとき、} & x^2-9=-x^2+2x+3 \end{cases}$$

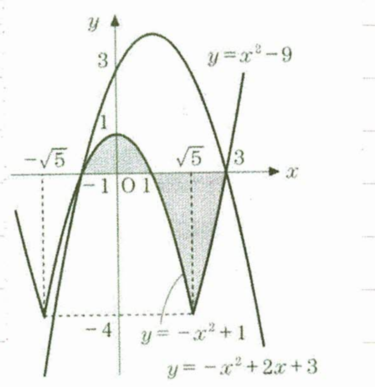
を解けばよく、

$-\sqrt{5} \leqq x \leqq \sqrt{5}$ のとき　$x=-1$ が解

$x \leqq -\sqrt{5}$・$\sqrt{5} \leqq x$ のとき　$2x^2-2x-12=0$　∴ $x=-2, 3$

このうち、$x \leqq -\sqrt{5}$、$\sqrt{5} \leqq x$ を満たすのは $x=3$

以上を踏まえて、



(2) (1)の結果より、求める面積は、

$$\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx + \int_{1}^{\sqrt{5}}\{-(-x^2+1)\}\,dx + \int_{\sqrt{5}}^{3}\{-(x^2-9)\}\,dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^{\sqrt{5}} + \left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_{\sqrt{5}}^3$$

$$=\frac{4}{3} + \left(\frac{2\sqrt{5}}{3}+\frac{2}{3}\right) + \left(18-\frac{22\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$=20-\frac{20\sqrt{5}}{3}$$